Eesti koolinoorte LVIII täppisteaduste olümpiaad
MATEMAATIKA KOOLIVOOR
Tallinnas, 24. novembril 2010.a.
VIII klass

LAHENDUSED JA HINDAMINE

1.ülesanne.
Leia x.

$$\left[2\frac{7}{36}-\left(\frac{\frac{47}{72}}{3\frac{1}{3}-x}+\frac{20}{27}\right)+1\frac{19}{72}\right]\cdot\frac{44}{75}-1\frac{3}{10}=\frac{1}{6}$$

Vastus: $x=\frac{1}{3}$

Lahendus:

1) $\frac{1}{6}+1\frac{3}{10}=1\frac{5+9}{30}=1\frac{14}{30}=1\frac{7}{15}$

2) $1\frac{7}{15}:\frac{44}{75}=\frac{22\cdot 75}{15\cdot 44}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$

3a) $2\frac{1}{2}-1\frac{19}{72}=1\frac{36-19}{72}=1\frac{17}{72}$

4a) $1\frac{17}{72}-2\frac{7}{36}=\frac{89}{72}-\frac{79}{36}=\frac{89-158}{72}=-\frac{69}{72}=-\frac{23}{24}$

5) $-\frac{23}{24}+\frac{20}{27}=\frac{-207+160}{216}=-\frac{47}{216}$

6) $-\frac{47}{72}:\left(-\frac{47}{216}\right)=\frac{47\cdot 216}{72\cdot 47}=3$

7) Oleme saanud, et $3\frac{1}{3}-x=3$.

Järelikult $x=3\frac{1}{3}-3=\frac{1}{3}$

Lahendus 2:
Ülejäänud tehted samad, mis lahenduses 1.

3b) $2\frac{7}{36}+1\frac{19}{72}=3\frac{14+19}{72}=3\frac{33}{72}=3\frac{11}{24}$

4b) $2\frac{1}{2}-3\frac{11}{24}=\frac{5}{2}-\frac{83}{24}=\frac{60-83}{24}=-\frac{23}{24}$

Hindamisjuhis:
Iga õige tehe 1p

Eesti koolinoorte LVIII täppisteaduste olümpiaad
MATEMAATIKA KOOLIVOOR
Tallinnas, 24. novembril 2010.a.
VIII klass

LAHENDUSED JA HINDAMINE

2. ülesanne.

Kahel kaalukausil on kokku 195 kommi. Paremal pool on sinised kommid ja vasakul punased kommid ning kaal on tasakaalus. Kui 11 sinist kommi ära süüa, siis selleks, et kaal oleks jälle tasakaalus tuleb vasakult võtta kaks punast kommi ja need lisada sinistele. Mitu sinist ja mitu punast kommi on algul kaalukaussidel?

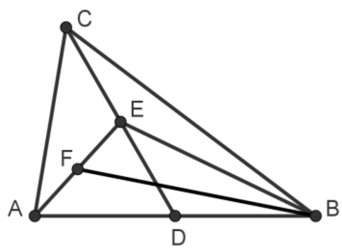
Vastus: Punaseid komme oli 52 ja siniseid 143.

Lahendus: Kuna pärast 11 sinise kommi söömist, tuleb kaalu tasakaalu saamiseks paremalt poolt võtta kaks punast kommi ja asetada alles jäänud siniste juurde vasakule, siis järelikult 11 sinist kommi kaalub samapalju kui 4 punast kommi.
Seega kaal on tasakaalus kui ühel pool on 4 punast ja teisel 11 sinist. Ehk kokku oleks kaalukaussidel 15 kommi. Et üldse oli kokku 195 kommi, siis neist punaseid oli 195 : 15 · 4 = 52 ja siniseid 195 – 52 = 143.

Hindamisjuhis:

Tähelepanek, et 11 sinise kommi kaalub sama palju kui 4 punast kommi	3p
Leitud õigesti kommide arvud	4p
kokku	7p

Antud ainult õige vastus: 2p



3.ülesanne

Kolmnurga ABC pindala on 20 cm^2. Teada on, et külje AB keskpunkt on D, lõigu CD keskpunkt on E ja lõigu AE keskpunkt on F. Leia kolmnurga FBE pindala.

Vastus: Kolmnurga EFB pindala on 5 cm^2.

Lahendus: Et punkt D on külje AB keskpunkt, siis kolmnurkade ADC ja DBC pindalad on võrdsed ja moodustavad poole kolmnurga ABC pindalast.
Et punkt E on lõigu CD keskpunkt, siis kolmnurkade DEA ja ECA pindalad on võrdsed ja moodustavad seega veerandi kolmnurga ABC pindalast. Kolmnurgast DBC saame analoogselt, et kolmnurkade EDB ja CEB pindalad on võrdsed on võrdsed ja moodustavad veerandi kolmnurga ABC pindalast.
Seega kolmnurga AEB pindala moodustab pool kolmnurga ABC pindalast.
Et punkt F on lõigu AE keskpunkt, siis kolmnurkade FAB ja EFB pindalad on võrdsed ja moodustavad pool kolmnurga ABE pindalast. Järelikult kolmnurga FBE pindala on veerand kolmnurga ABC pindalast, s.t 5 cm^2.

Hindamisjuhis:

Näidatud, et kolmnurkade ADC ja DBC pindalad on võrdsed	1p
Näidatud, et kolmnurkade EDA ja CEA pindalad on võrdsed	1p
Näidatud, et kolmnurkade EDB ja CEB pindalad on võrdsed	1p
Näidatud, et kolmnurga AEB pindala on pool kolmnurga ABC pindalast	2p
Näidatud, et kolmnurkade FAB ja EFB pindalad on võrdsed	1p
Leitud kolmnurga FEB pindala	1p
kokku	7p

Antud ainult õige vastus: 2p

Eesti koolinoorte LVIII täppisteaduste olümpiaad
MATEMAATIKA KOOLIVOOR
Tallinnas, 24. novembril 2010.a.
VIII klass

LAHENDUSED JA HINDAMINE

4.ülesanne.

Andres kirjutas tahvlile viis järjestikust naturaalarvu. Kui ta kustutas neist viiest arvust ühe, siis alles jäänud arvude summa oli 2011. Millised arvud kirjutas Andres tahvlile?
Vastus: Andres kirjutas arvud 501, 502, 503, 504, 505.

Lahendus 1: Olgu need viis järjestikust arvu $x-2$, $x-1$, x, $x+1$, $x+2$. Nende arvude summa on $5x$.
Kui ta oleks kustutanud arvu $x-2$, siis nelja arvu summa oleks $4x+2$. On selge, et see summa peaks olema paarisarv.
Analoogselt saame, et nelja arvu summa oleks olnud paarisarv, kui ta oleks kustutanud kas arvu x või $x+2$.
Seega kustutas ta kas arvu $x-1$ või $x+1$.
Kui ta kustutas arvu $x-1$, siis nelja alles jäänud arvu summa oleks $4x+1$.
Seega peaks kehtima võrdus $4x+1=2011$, millest $x=502{,}5$. See aga ei sobi, sest kirjutatud arvud olid naturaalarvud.
Kui ta kustutas arvu $x+1$, siis nelja alles jäänud arvu summa oleks $4x-1$.
Seega peaks kehtima võrdus $4x-1=2011$, millest $x=503$.
Järelikult Andres kirjutas arvud 501, 502, 503, 504, 505.

Lahendus 2. Nelja alles jäänud arvu keskmine on 2011 : 4 = 502,75. Järelikult kuna need arvud on „peaaegu järjestikused“(üks võib vahelt puudu olla), siis vaatleme arve, millest vähima suurus on ligikaudu 500.
On selge, et kui viiest järjestikusest arvust üks kustutada ja nelja alles jäänud summa on 2011, siis viiest järjestikusest arvust nelja suurima summa peab olema mitte väiksem kui 2011 ja nelja väikseima arvu summa ei saa olla suurem kui 2011.
Kui viis järjestikust arvu oleks, 500, 501, 502, 503, 504 siis nelja suurima arvu summa on 2010. Seega ei saa see ega ükski teine viisik, mille vähim arv oleks 500 või väiksem, sobida selleks viisikuks.
Kui viis järjestikust arvu oleks, 501, 502, 503, 504, 505, siis näeme, et neist viiest arvust on võimalik valida neli nii, et nende summa oleks nagu vaja 501 + 502 + 503 + 505 = 2011.
Kui viis järjestikust arvu oleks 502, 503, 504, 505, 506, siis nelja alles jääva arvu summa suurim võimalik väärtus oleks: 502 + 503 + 504 + 505 = 2014.
Seega ei saa see ega ükski teine viisik, mille vähim arv oleks 502 või suurem, sobida selleks viisikuks.
Ainukeseks tingimusi täitvaks arvuviisikuks on seega 501; 502; 503; 504; 505

Hindamisjuhis:
Lahendus 1:

Võetud kasutusele tähistus viie järjestikuse arvu jaoks	1p
Näidatud, et kui kustutada arv, mis on suuruse poolest teine, siis sellised viis järjestikust arvu leiduvad	2p
Näidatud, et kui kustutada, kas kõige suurem arv või üks kolmest väiksemast arvust, siis ei ole võimalik nelja alles jäänud arvu summaks saada 2011	4p
kokku	7p

Antud ainult õige vastus: 2p

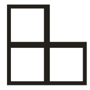
Lahendus 2:

Leitud nelja alles jäänud arvu keskmine	1p
Näidatud, et kui väikseim arv on 499 või väiksem, siis sellised viisikud ei sobi	2p
Näidatud, et kui väikseim arv on 502 või suurem, siis sellised viisikud ei sobi	2p
Näidatud, et viieks järjestikuseks arvuks sobivad 501, 502, 503, 504, 505	1p
Leitud, et kustutada tuleb arv 504	1p
kokku	7p

Antud ainult õige vastus: 2p

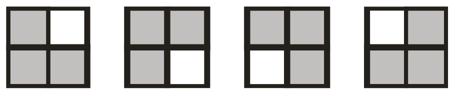
LAHENDUSED JA HINDAMINE

5.ülesanne.



On antud ruudustik mõõtmetega $n \times n$. Joonisel oleva kolmest ruudustiku ühikruudust koosneva nurgiku paigutamiseks ruudustikule nii, et see katab täpselt kolm ruudustiku ühikruutu, on 100 erinevat võimalust. Leia ruudustiku mõõtmed.

Vastus: Ruudustiku mõõtmed on 6 × 6.



Lahendus: Kujundi paigutamiseks ruudustikku mõõtmetega 2 × 2 on 4 erinevat võimalust (vt. joonis). Kui ruudustik on mõõtmetega $n \times n$, siis ruute mõõtmetega 2 × 2 on seal $(n-1)^2$. Seega saame, et peab kehtima võrdus.
$4(n-1)^2 = 100$, millest $n = 6$.

Hindamisjuhis:

Näidatud, et ruudustikku mõõtmetega 2 × 2 on kujundi paigutamiseks 4 erinevat võimalust	2p
Ruudustikus mõõtmetega $n \times n$ on kokku $(n-1)^2$ ruutu mõõtmetega 2 × 2	2p
Kirja pandud õige seos ja sellest leitud arvu n väärtus	3p
kokku	7p

Antud ainult õige vastus: 2p
Märkus: Kui on antud vastus ja lisaks on näidatud konkreetse joonise abil, et ruudustikus 6 × 6 on paigutamiseks 100 erinevat võimalust, anda kokku 3p.